



جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی دوره آموزش عمومی^۱

The Position of Problem-Posing in Compulsory Education Mathematics Textbook

A.Rafiepour(P.H.D), M.Rahmani

Abstract: The aim of the present study is to analyze the content of mathematics textbooks in primary and secondary school in terms of the amount of activities which designed based on problem-posing approach. Type of this research is qualitative and mathematics textbooks in grades 1-9 which published in 1398 school year were considered as statistical population in current study. In this regard, upon Krippendorff recommendation, firstly, the key words that confirm the problem-posing were identified, then the situations were identified in the textbook, and finally the situations were categorized according to theoretical framework from literature. Stoyanova and Ellerton (1996) framework was applied for classification of problem posing situations in mathematics textbooks. Finding of this research shows that there are only 40 problem-posing situations in these mathematics textbooks from grade one to grade nine which 60 percent of them appeared in the second three years of primary school textbooks. Moreover 67.5 percent of these problem posing situation have semi-structured context. Comparison between the number of problem-posing activities and problem-solving activities in mathematics textbooks show that textbooks writers had little attention to problem-posing activities. This paper finalized with some recommendations for improving current situation through making some small changes in school mathematics textbooks questions.

Keywords:

Mathematics Education, Problem-Posing, Textbook, Content analysis, Compulsory Education

دکتر ابوالفضل رفیع پور^۲، مریم رحمانی^۳

چکیده: هدف پژوهش حاضر تحلیل محتوای کتاب های درسی ریاضی دوره ابتدایی و متوسطه اول از جهت میزان فعالیت های مبتنی بر طرح مسئله است. پژوهش از نوع کیفی است و جامعه آماری مورد بررسی کتاب های ریاضی پایه اول تا نهم چاپ سال ۱۳۹۸ هستند. تحلیل محتوا طبق روش کریپنورف انجام شد که ابتدا واژگان کلیدی ای که موید طرح مسئله است تعیین شد سپس شناسایی این موقعیت ها در کتاب درسی صورت گرفت. برای دسته بندی موقعیت های طرح مسئله مطرح شده در کتاب های درسی، از چارچوب نظری استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) استفاده گردید. نتایج پژوهش نشان دادند که در مجموع ۹ کتاب مورد بررسی، ۴۰ موقعیت طرح مسئله وجود دارد که ۶۰ درصد آن ها در سه سال دوم ابتدایی است و ۶۷/۵ درصد را موقعیت های نیمه ساختار یافته تشکیل می دهند. مقایسه بین تعداد فعالیت های مبتنی بر طرح مسئله و فعالیت های حل مسئله در کتاب های درسی ریاضی، نشان می دهد که مولفان کتاب های درسی، توجه کمی به به فعالیت های طرح مسئله داشته اند. در پایان، پیشنهادهایی برای بهبود وضعیت حاضر بر اساس ایجاد تغییرات کوچک در متن سوالات کتاب های درسی ریاضی ارائه شده است.

واژگان کلیدی: آموزش ریاضی، طرح مسئله، کتاب

درسی، تحلیل محتوا، آموزش عمومی

^۱ مقاله حاضر از نوع پژوهشی است. تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۵/۰۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۹

^۲ دانشیار دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، تهران، ایران. رایانامه:

drafiepour@gmail.com

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، تهران، ایران. رایانامه:

maryamrahmani1993@gmail.com

مقدمه و مسئله مورد بررسی

پیشرفت علم همواره مدیون مسئله‌هایی است که ایجاد شده‌اند. بدیع‌ترین ایده‌ها و خلاقانه‌ترین روش‌ها معمولاً ابتدا با "چرا" و "چگونه" هایی آغاز می‌شوند که نهایتاً واکاوی این پرسش‌ها منجر به خلق روش‌های نو می‌شود. پیشرفت‌های بزرگ در علم به وسیله کسانی اتفاق افتاده است که جرأت متفاوت نگاه کردن به مجموعه‌ای از ویژگی‌ها و پرسیدن اینکه «اگر نه، چه؟» را داشته‌اند؛ کسانی که تفکرشان را فراتر از وضع موجود می‌برند و می‌پرسند: "اگر شرایط فعلی نباشد، چه می‌شود؟" شاید مشهورترین نمونه توسعه هندسه نا اقلیدسی باشد، تا قرن ۱۸ ریاضیدانان تلاش بیهوده-ای برای اثبات اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی) به عنوان یک قضیه انجام دادند. ۲۰۰۰ سال طول کشید تا ریاضیدانان آماده شوند که صرفاً بپرسند: «اگر چنین نباشد که از یک نقطه خارجی بتوان تنها یک خط موازی خط داده شده رسم کرد، چه؟ اگر دست کم دو خط باشد، چه؟ در این صورت برای ساختار هندسه چه اتفاقی می‌افتد؟» (براون و والتر، ۲۰۰۴). و این تنها نمونه‌ای از روش‌ها پرورش ذهن و طرح مسئله است.

در زندگی واقعی، همه ما با نیاز به طرح سوالات روبرو هستیم و بسیاری از این‌ها ممکن است دارای مؤلفه‌های ریاضی باشند. اغلب مسئله‌ها با محاسبات نسبتاً ساده در ارتباط با حمل و نقل یا خرید، ایجاد می‌شود. اما بعضی اوقات ممکن است این سوالات بسیار پیچیده تر باشد و نیاز به تشریح دقیق‌تر داشته باشد (الرتون^۱، ۲۰۱۳).

اگر چه از لحاظ تاریخی، حل مسئله بیشتر از طرح مسئله در ریاضیات و آموزش ریاضی مورد توجه بوده است، اما در دهه‌های گذشته، اصلاحات برنامه درسی در بسیاری از نقاط جهان، توجه به طرح مسئله را در سطوح مختلف تحصیلی افزایش داده است. از نظر محققان طرح مسئله توان بالقوه‌ای برای یادگیری دانش آموزان در ریاضی محض و

¹ Ellerton

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور

کاربردی ایجاد می کند. چون طرح مسئله و حل مسئله اغلب در هم آمیخته اند و موفقیت در یکی از آنها می تواند موفقیت در دیگری را نیز به دنبال داشته باشد (کای^۱ و جیانگ، ۲۰۱۷). همچنین دانش آموزان نیاز دارند تا تفکر خود را فراتر از روش های حل مسئله گسترش دهند تا ساختار عمیق تر و هدف کار خود را از حل مسائل درک کنند. فعالیت های طرح مسئله می تواند زمینه های فکری برای پیشرفت ریاضیات دانش آموزان را فراهم کند (کای و جیانگ، ۲۰۱۷). به علاوه می توان به تاثیر طرح مسئله در توسعه خلاقیت دانش آموزان (فرزند، ۱۳۹۱) درک بهتر ساختار یک مسئله (سینگر و همکاران، ۲۰۱۳)، بهبود حل مسئله (الرتون، ۲۰۱۳)، ارتقا توانایی تفکر (بونوتو، ۲۰۱۳) و ایجاد بینش برای معلمان نسبت به تفکر دانش آموزان (کای و هوانگ، ۲۰۱۹) اشاره کرد.

با توجه به نتایج پژوهش های فوق و تاثیرات مثبتی که طرح مسئله بر یادگیری و نگرش دانش آموزان دارد، از آنجا که کتاب های درسی مهم ترین منبع آموزشی در دسترس دبیران و و دانش آموزان هستند، در این پژوهش به بررسی میزان فعالیت های مبتنی بر طرح مسئله در کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه اول پرداختیم تا به این پرسش پاسخ دهیم که آیا در آموزش ریاضی مدرسه ای ایران طرح مسئله جایگاه ویژه ای دارد یا خیر؟ و معیار تعیین این جایگاه در پژوهش حاضر تعداد موقعیت های ۲ طرح مسئله در کتاب های درسی است و چنانچه این تعداد با حل مسئله در یک سطح باشد طرح مسئله جایگاه ویژه و معناداری دارد.

^۱ Cai

^۲ موفقیت طرح مسئله شامل هر عبارتی است که مستقیماً از دانش آموز بخواهد یک مسئله را طرح نماید.

پیشینه پژوهش در حوزه طرح مسئله

بررسی‌های تاریخی نشان می‌دهد که سقراط (۴۶۹ قبل از میلاد تا ۳۹۹ قبل از میلاد) یک روش کارآمد برای یادگیری را با استفاده از یک گفت و شنود مداوم مبتنی بر طرح و حل مسائل برای تحریک تفکر انتقادی و روشن کردن ایده‌ها ایجاد کرد. تمرکز بر ماهیت تفکر انتقادی تا کنون ادامه داشته و موضوعی است که امروزه در آموزش و پرورش اهمیت بیشتری یافته است (سینگر^۱ و همکاران، ۲۰۱۳). یکی از اولین مراجعی که توصیه کرد تا دانش آموزان به طرح مسئله بپردازند، توسط بلفیلد^۲ بیان شد؛ وی هنگام ذکر ۱۳ پیشنهاد برای معلمان بلافاصله پس از مقدمه در کتاب "مدل تجدید نظر شده‌ی حساب ابتدایی"^۳ در آخرین پیشنهاد خود گفت: "کودکان به طرح مسائل خود علاقه‌مند هستند. اجازه دهید برخی از نمونه‌های روشن (طرح مسئله) اساس مسئله‌های کودکان [تنها حل‌کننده‌ی مسئله بودن] را تغییر دهد" بیش از ۷۰ سال پیش، انیشتین^۴ و اینفلد^۵ خاطر نشان کردند: "طرح یک مسئله معمولاً ضروری‌تر از حل آن است، چون راه حل ممکن است صرفاً مربوط به مهارت‌های ریاضی یا تجربی باشد، اما برای طرح سؤالات جدید، احتمالات جدید و در نظر گرفتن سؤالات قدیمی از زاویه جدید، نیاز به تصورخلاق دارد و این پیشرفت واقعی در علم را نشان می‌دهد (الرتون، ۲۰۱۳).

در سال ۱۹۷۰، زمانی که پائولو فریر^۶ اصطلاح "طرح مسئله"^۷ را برای تأکید بر تفکر انتقادی، در کتاب "آموزش ستم دیدگان" معرفی کرد؛ روش شناسایی طرح مسئله به

¹ Singer

² Belfield

³ Revised Model Elementary Arithmetic

⁴ Einstein

⁵ Infeld

⁶ Paulo Freire

⁷ Problem- posing

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور
حوزه های مختلف دانش تعمیم داده شد (سینگر و همکاران، ۲۰۱۵). اما از زمانی که
تحقیقات در مورد طرح مسئله ریاضی مطرح شد، تا دهه ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ طول کشید تا
طرح مسئله برای آموزش ریاضیات مهم شود (الرتون، ۲۰۱۳). به علاوه کیلپاتریک
(۱۹۸۷) اظهار داشته است که "تدوین مسئله نه تنها به عنوان هدف آموزش بلکه به
عنوان وسیله آموزش نیز باید مورد توجه قرار گیرد" (براون و والتر، ۲۰۰۴).

در سال ۲۰۰۹ یک کارگروه تحقیقاتی چند ملیتی با عنوان "طرح مسئله در آموزش
ریاضیات: ایجاد یک پایگاه نظری برای تحقیق" در حاشیه سی سومین کنفرانس بین
المللی روانشناسی آموزش ریاضی^۱، متولد شد. این کارگروه توسط، کای^۲، الرتون^۳،
ایماوکا^۴، پلسزر^۵، سینگر^۶ و ویکا^۷ به کمیته برگزاری کنفرانس پیشنهاد شد و پس از
تصویب با مشارکت پژوهشگرانی از کشورهای مختلف، این کارگروه، کار خود را آغاز
کرد. محورهای اصلی مورد بحث در این کارگروه عبارت بودند از:

- طرح مسئله به عنوان جزء جدایی ناپذیر از ریاضیات مدرسه؛
- مقایسه اجزای شناختی طرح مسئله و حل مسئله در تفکر ریاضی؛
- طرح مسئله و گفتمان در کلاس درس؛
- فرآیندهای طرح مسئله و چگونگی ارتباط آنها با خلاقیت.

در خلال بحث های انجام شده در این کارگروه، روش های مختلفی برای گنجاندن طرح
مسئله در کلاس های درس ریاضی مطرح شد، و سوالات جدیدی در این زمینه مطرح

¹ - 33rd International Conference of Psychology in Mathematics Education
(PME 33)

² Jinfa Cai

³ Nerida Ellerton

⁴ Imaoka Mitsunori

⁵ Ildiko Pelczer

⁶ Florence Mihaela Singer

⁷ Cristian Voica

شد. در نتیجه همین بحث‌های طولانی، کارگروه تحقیقاتی^۱ دیگری در سال ۲۰۱۱ با عنوان: "طرح مسئله در آموزش و یادگیری ریاضی: یک برنامه تحقیقاتی" در حاشیه سی و پنجمین کنفرانس سالانه روانشناسی آموزش ریاضی، برگزار شد. این کارگروه در دو جلسه کاری ۹۰ دقیقه‌ای در مورد سوالاتی به شرح زیر به بحث و تبادل نظر پرداختند (سینگر و همکاران، ۲۰۱۳).

- طرح مسئله و حل مسئله در جریان اکتشاف ریاضی چگونه با یکدیگر تعامل می‌کنند؟
 - چگونه می‌توان یادگیری دانش آموزان را از طریق درگیر شدن در اکتشافات ریاضی و طرح مسئله در موقعیت‌های مسائل باز- پاسخ بهبود بخشید؟
 - آیا استفاده از طرح مسئله به عنوان ابزاری برای ارزشیابی امکان‌پذیر است؟
- بحث‌های این کارگروه، نقطه شروعی برای تعریف پروژه‌های تحقیقاتی مختلفی در زمینه طرح مسئله در سرتاسر جهان شد. بر اساس این پژوهش‌ها، پیشنهاد شد که طرح مسئله می‌تواند بخشی طبیعی و جدایی‌ناپذیر از کلاس‌های درس ریاضی در تمام سطوح باشد.^۲

الف) رابطه بین طرح مسئله و حل مسئله

تمرین کردن به کمک طرح مسئله متفاوت از تمرین‌های معمول آموزش به کمک حل مسائل از پیش تدوین شده است و تشویق کردن دانش‌آموزان برای طرح مسائل جدید

^۱ the 33rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME

^۲ نویسنده اول مقاله حاضر، در هر دو کارگروه که در حاشیه کنفرانس‌های سالانه روانشناسی آموزش ریاضی برگزار می‌شد، حضور داشته است. در آن زمان، پژوهش‌های مربوط به حوزه طرح مسئله، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی در دنیا بود ولی پژوهش‌های اندکی در این زمینه انجام شده بود. با گذشت زمان، پژوهش‌های متعددی در زمینه طرح مسئله شکل گرفت. به طوری که امروزه شماره ویژه‌ای از مجله تحقیقات آموزشی در ریاضی به حوزه طرح مسئله اختصاص یافته است و کتاب‌های خوبی با تمرکز روی طرح مسئله منتشر شده‌اند. در داخل کشور نیز، پژوهش‌های خوبی در زمینه طرح مسئله انجام شده است که برخی از آنها در مراجع آمده‌اند.

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور
یکی از پایه های مهم اصلاح در آموزش ریاضیات است (حسنا و همکاران، ۲۰۱۷).
طرح مسئله بر توانایی حل مساله کلامی دانش آموزان تأثیر مثبت دارد و این فعالیت ها
همچنین فرصت درک مفاهیم و فرآیندهای ریاضی را دانش آموزان را فراهم می کند و
می تواند دانش آموزان را به عنوان کاربران هوشمند از ریاضیات در زندگی روزمره
خود تبدیل کند (بونوتو، ۲۰۱۳). در این راستا پژوهش اسکندری (۱۳۹۲) نیز که به
بررسی تأثیر پرورش مهارت طرح مسئله بر توانایی حل مسئله ریاضی دانش آموزان
سوم راهنمایی پرداخته است، نشان داد که انجام فعالیت های طرح مسئله موجب
افزایش معنادار توانایی حل مسئله دانش آموزان می گردد. علاوه بر این، نتایج به دست
آمده از پرسشنامه نشان داد که اغلب دانش آموزان، انجام فعالیت های طرح مسئله را
لذت بخش می دانستند و معتقد بودند این دوره آموزشی نه تنها بر توانایی حل مسئله
آنها بلکه بر دیدگاه آنها نسبت به حل مسئله و حتی ریاضیات تأثیر مثبت داشته است.

ب) موقعیت های مختلف طرح مسئله

بعضی از مطالعات روی ساختار مسئله تمرکز دارند برخی به زمانی که طرح مسئله رخ
می دهد می پردازند و همچنین برخی به قالب طرح مسئله اشاره می کنند. در زیر سه
دسته بندی برای طرح مسئله مطرح خواهد شد. اولین دسته بندی توسط سیلور در سال
۱۹۹۴ ارایه گردید. از دیدگاه سیلور طرح مسئله شامل ایجاد مسئله جدید و شکل گیری
مجدد از مسائل قبلی گفته می شود. بنابراین، طرح مسئله ممکن است قبل، حین یا بعد
از حل مسئله رخ دهد. به طور مشخص، نوعی از طرح مسئله که معمولاً به عنوان
فرمول بندی مسئله یا شکل گیری مجدد از آن یاد می شود، در فرایند حل مسئله رخ
می دهد (سیلور، ۱۹۹۴). دسته بندی دوم توسط استویانوا و الرتون در سال ۱۹۹۶ ارایه
گردید. از دیدگاه آنها طرح مسئله می تواند به صورت آزاد، نیمه ساختاری یا ساختاری
باشند. در جدول ۱ برای هر کدام از این موقعیت ها، مثال ریاضی آمده است.

جدول ۱. موقعیت های مختلف برای طرح مسئله (استویانوا و الرتون، ۱۹۹۶)

مقال ریاضی	موقعیت های مختلف طرح مسئله
* برای المپیاد ریاضی مدرسه مسئله ای طرح کنید. * برای دوست خود یک مسئله ریاضی طرح کنید.	طرح مسئله در موقعیت آزاد ^۱ : در این موقعیت فرد باید طبق تجربیات قبلی خود مسئله طرح کند.
* برای عبارت زیر یک مسئله طرح کنید. $۵! + ۳!$	طرح مسئله در موقعیت نیمه ساختار یافته ^۲ : در این موقعیت باید برای شرایط داده شده مسئله طرح کنند.
* بر اساس مسئله زیر، مسائل جدید طرح کنید. " چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام ۰ تا ۵ می توان نوشت؟ "	طرح مسئله در موقعیت ساختار یافته ^۳ : در این موقعیت باید بر پایه مسئله ای مشخص مسائل دیگر طرح شود.

دسته بندی سوم برای فعالیت های طرح مسئله توسط کای و جیانگ در سال ۲۰۱۷ ارایه شد و در آن پنج نوع فعالیت (شامل یک مسئله با شرایط آزاد، یک مسئله با پاسخ داده شده، یک مسئله که شامل اطلاعات خاص است، سوالاتی برای یک موقعیت مسئله ساز، یک مسئله متناسب با محاسبات داده شده) برای طرح مسئله، شناسایی نمودند.

¹ Free Problem-Posing Situations

² Semi-Structured Problem-Posing Situations

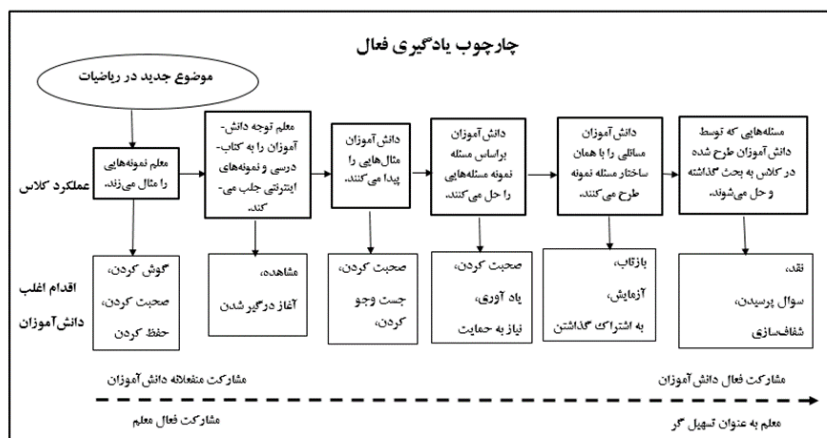
³ Structured Problem-Posing Situations

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور

پ) جایگاه طرح مسئله در برنامه درسی

اصلاحات برنامه درسی اغلب به عنوان یک ابزار قدرتمند برای بهبود آموزش در نظر گرفته شده است، زیرا تغییرات در برنامه درسی ممکن است به تغییر رفتار در کلاس درس و یادگیری دانش آموزان منجر شود. ۳۰ سال پیش گتزلز (۱۹۷۹)، به نقل کای و همکاران، (۲۰۱۵) ابراز تاسف کرد که در مقایسه با حل مسئله، طرح مسئله در تحقیقات مورد غفلت قرار گرفته است، اما در سال های اخیر هم مربیان و هم محققان به طور هماهنگ، طرح مسئله را در دستور کار قرار داده اند (سینگر و همکاران، ۲۰۱۵). با توجه به اینکه طرح مسئله نقش اصلی را در کلاس های درس ریاضی بازی می کند، معلمان باید به منابعی برای طرح مسئله دسترسی داشته باشند. از آنجا که اولین و مهم ترین منابعی که دبیران به آن دسترسی دارند کتب درسی است، مواد برنامه درسی ریاضی باید شامل فعالیت های مفیدی در زمینه طرح مسئله باشند. بنابراین اهمیت تمرین های فعالیت های مبتنی بر طرح مسئله در مواد برنامه درسی نباید نادیده گرفته شود. برای این منظور التون^۱ (۲۰۱۳) یک چارچوب یادگیری فعال را پیشنهاد کرده است که فرایندهای طرح مسئله ی کلاس های ریاضیات در بر می گیرد (شکل ۱).

¹ Ellerton



شکل ۱. چارچوب یادگیری فعال الرتون (الرتون، ۲۰۱۳)

همچنین با نگاه دقیق‌تر به فعالیت‌های جمعی دانش‌آموزان، کنتورویچ^۱، کویچو^۲، لایکین^۳ و برمن^۴ (۲۰۱۲) چارچوبی نظری شکل ۲ را برای کمک به محققان به منظور انجام فعالیت‌های طرح مسئله ریاضی دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک، ارائه داده‌اند. این چارچوب شامل پنج جنبه است که شامل سازمان‌بندی تمرین، دانش پایه‌ای دانش‌آموزان، اکتشاف و نقشه‌ی کلی طرح مسئله، تعامل و پویایی در گروه‌ها، در نظر گرفتن استعدادهای فردی است. کنتورویچ و همکاران (۲۰۱۲) چارچوب خود را برای تجزیه و تحلیل فرایندهای طرح مسئله در دو گروه از دانش‌آموزان دبیرستانی با سوابق مشابه که به آنها فعالیت‌های طرح مسئله مشابه داده شده است، اعمال کردند.

¹ Kontorovich

² Koichu

³ Leikin

⁴ Berman



شکل ۲. چارچوب نظری طرح مسئله کتروویچ و همکاران (کونروویچ، ۲۰۱۲)

روش انجام تحقیق

به منظور پاسخ دادن به سوال پژوهش، و تعیین جایگاه طرح مسئله در کتاب های جدیدالتالیف ریاضی در پایه اول تا نهم از روش تحلیل محتوا کریپوندرف (۱۳۸۳) استفاده شد. دلیل انتخاب پایه اول تا نهم مشترک بودن این کتاب ها بین تمام دانش آموزان است. چراکه از پایه دهم به بعد، دانش آموزان در رشته های متفاوت ادامه تحصیل می دهند و محتوای کتاب هایشان متفاوت خواهد بود. از آنجایی که مولفان کتاب های درسی در پایه های مختلف یکسان نبودند، چارچوب محتوایی کتاب های درسی با هم فرق داشتند و امکان نمونه گیری فراهم نبود و لذا کل محتوای کتاب ها مورد بررسی قرار گرفتند. همه کتاب های مورد بررسی در این پژوهش چاپ سال ۱۳۹۸ بودند، و موقعیت های طرح مسئله موجود در همه این کتاب ها بر اساس دسته بندی استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) دسته بندی شدند. دلیل انتخاب این دسته بندی مطابقت بیشتر

آن با موقعیت‌های طرح مسئله موجود در کتاب درسی بود زیرا روش سیلور (۱۹۹۴) مبتنی بر زمان است و قابلیت تطبیق با منابع مکتوب را ندارد و روش کای و جیانگ (۲۰۱۷) تعداد دسته بندی‌ها جزئی تر است و موجب فاصله گرفتن پژوهش حاضر از هدف کلی آن که تحلیل محتوا کتب درسی است، می‌شد. به منظور مشخص کردن موقعیت‌های طرح مسئله ابتدا واژگان و عبارت‌های کلیدی‌ای که تعیین کننده طرح مسئله بودند تعیین شد، این واژگان شامل عبارت‌های "مسئله بسازید"، "مسئله طرح کنید" و عباراتی با مضمون‌های مشابه بود. سپس با استفاده از این کلید واژه‌ها فعالیت‌های مرتبط با طرح مسئله شناسایی و دسته‌بندی شدند.

یافته‌های پژوهش

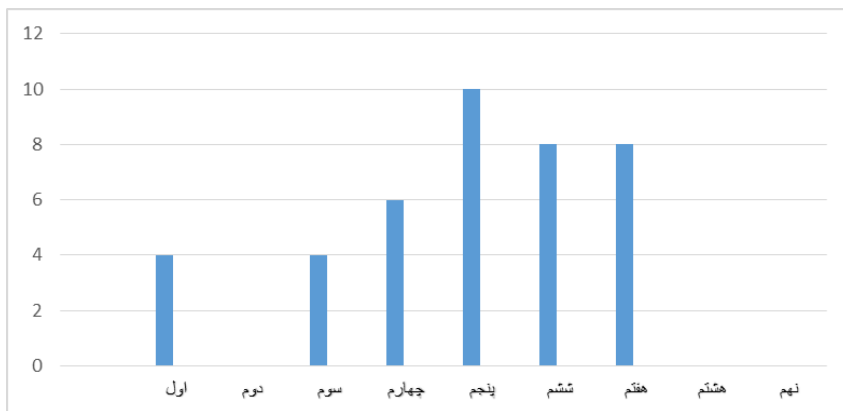
نتایج به دست آمده از بررسی کتاب‌های درسی جدید التالیف در مقاطع ابتدایی و متوسطه‌ی اول در جدول ۲، به تفکیک پایه تحصیلی ارائه شده‌است. داده‌های جدول ۲ نشان می‌دهد که فعالیت طرح مسئله مبتنی بر موقعیت آزاد در هیچ یک از کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای از پایه اول تا نهم وجود ندارد. نتایج جدول ۲ در نمودار ۱ به صورت تصویری آمده است و روند توجه به طرح مسئله را در سرتاسر پایه‌های اول تا نهم نشان می‌دهد. نکته جالب توجه این است که در کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در پایه‌های دوم، هشتم و نهم هیچ موقعیتی که با طرح مسئله در ارتباط باشد، وجود ندارد.

جدول ۲. فراوانی فعالیت‌ها مبتنی بر طرح مسئله در کتاب‌های ریاضی پایه (۹-۱)

تعداد کل	ساختار یافته	نیمه ساختار یافته	آزاد	انواع طرح مسئله
				پایه
۴	۴	۰	۰	اول
۰	۰	۰	۰	دوم
۴	۱	۳	۰	سوم

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور

تعداد کل	ساختار یافته	نیمه ساختار یافته	آزاد	مسئله
				پایه
۶	۰	۶	۰	چهارم
۱۰	۲	۸	۰	پنجم
۸	۰	۸	۰	ششم
۸	۶	۲	۰	هفتم
۰	۰	۰	۰	هشتم
۰	۰	۰	۰	نهم
۴۰	۱۳	۲۷	۰	مجموع



نمودار ۱. فراوانی فعالیت‌های مبتنی بر طرح مسئله در کتاب‌های ریاضی پایه (۹-۱)

در مجموع ۴۰ موقعیت مرتبط با طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی پایه‌های اول تا نهم، شناسایی شد که ۶۷/۵ درصد مربوط به موقعیت نیمه ساختار یافته است، که از دانش‌آموزان خواسته شده تا طبق عبارت یا شکل داده شده مسئله‌ای طراحی کنند. توجه

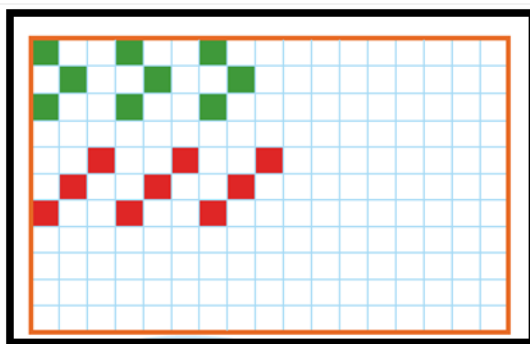
به طرح مسئله در مقطع ابتدایی بیشتر از متوسطه اول است، به طوری که ۸۰ درصد این موقعیت‌ها در کتاب‌های درسی ریاضی در دوره ابتدایی توزیع شده‌اند. همچنین بیشترین تمرکز فعالیت‌های مرتبط با طرح مسئله در کتاب‌های درسی ریاضی دوره دوم مقطع ابتدایی (به میزان ۶۰ درصد) دیده می‌شود.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که دانش‌آموزان از سال‌های اول ابتدایی با مسائل آشنا می‌شوند و آموختن چگونگی شکل دادن به مسائل از همان ابتدا در روند یادگیری ریاضیات نقش تعیین کننده‌ای خواهد داشت. اولین موقعیت‌های طرح مسئله‌ای که دانش‌آموزان ایرانی با آن مواجه می‌شوند، در کتاب ریاضی اول ابتدایی است. این کتاب شامل ۴ موقعیت ساختاریافته است که سه مورد آن مشابه شکل (۴) می‌باشد و از دانش‌آموزان خواسته شده تا الگویی مشابه الگوهای داده‌شده طراحی کنند.

عددها را بنویس. جاهای خالی را با عدد مناسب پر کن.

الگوها را ادامه بده. یک شکل ۳ تایی در نظر بگیر و یک الگو بساز.

بشمار و بنویس



شکل ۴. ریاضی اول دبستان (۱۳۹۸) - صفحه ۱۲۲

در کتاب درسی ریاضی پایه دوم هیچ موقعیت طرح مسئله‌ای وجود ندارد. کتاب درسی ریاضی پایه سوم شامل سه موقعیت نیمه ساختار یافته و یک موقعیت ساختار یافته

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور است. شکل (۵) یک مثال برای موقعیت ساختار یافته و شکل (۶) یک مثال برای موقعیت نیمه ساختار یافته را نشان می‌دهد.

کار در کلاس

زهرآ کارهای خود را در روز جمعه (یک شبانه روز) به صورت زیر نشان داده است. عددهای مناسب برای ساعت‌های بعدازظهر را بنویسید و شکل را کامل کنید.

قبل از ظهر

بعد از ظهر

حالا به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

زهرآ در مجموع چند ساعت در خانه درس خوانده است؟

زهرآ چه ساعتی به مهمانی رسیده است؟ _____ بعدازظهر یا _____

زهرآ چه ساعتی از مهمانی برگشته و به خانه رسیده است؟ _____ بعدازظهر یا _____

شما هم چند سؤال مثل سؤال‌های بالا برای دوست خود طرح کنید و او به آن‌ها جواب دهد. سپس او سؤال کند و شما جواب دهید.

شکل ۵. ریاضی سوم دبستان (۱۳۹۸) - صفحه ۱۷

۳- با توجه به شکل، یک مسئله‌ی ضرب یا تقسیم بنویسید.

شکل ۶. ریاضی سوم دبستان (۱۳۹۸) - صفحه ۷۶

دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی، شماره ۱۷، سال نهم، بهار و تابستان ۱۴۰۰

کتاب درسی ریاضی پایه چهارم شامل شش موقعیت نیمه ساختار یافته است که تمام این موقعیت‌ها مشابه شکل (۷) می باشند. در این دسته از مسایل از دانش آموزان خواسته شده است تا برای یک عبارت جبری مسئله ای را طرح نمایند.

برای هر کدام از عبارت‌های زیر یک مسئله بنویسید و آنها را حل کنید.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} =$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} =$$

شکل ۷. ریاضی چهارم دبستان (۱۳۹۸) - صفحه ۳۳

کتاب درسی ریاضی پایه پنجم بیشترین موقعیت طرح مسئله (۱۰ مورد) را در بین کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای از پایه اول تا نهم دارا می باشد. از این ده مورد، هشت موقعیت نیمه ساختار یافته هستند و دو مورد ساختار یافته می باشند. شکل (۸) مثالی را برای موقعیت نیمه ساختار یافته در کتاب درسی پایه پنجم ابتدایی نشان می دهد. شکل (۹) مثالی را برای موقعیت ساختار یافته در کتاب درسی پایه پنجم ابتدایی به تصویر کشیده است.

با استفاده از جدول روبه‌رو، مسئله‌ای درباره‌ی تناسب بنویسید و آن را حل کنید.

۲	
۷	

شکل ۸. ریاضی پنجم دبستان (۱۳۹۸) - صفحه ۵۹

اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. در مورد روش‌های مختلف آن در کلاس گفت‌وگو کنید.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{11}{5}, \frac{7}{4}, 5, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}, 2, \frac{1}{3}$$

مراحل زیر یکی از روش‌های حل این مسئله را نشان می‌دهد.

الف) بزرگ‌ترین عدد کدام است؟

ب) چه اعدادی از ۲ بیشتر هستند؟

ب) چه اعدادی از ۱ بیشتر و از ۲ کمترند؟

ت) اعداد کمتر از ۱ کدام‌اند؟

شکل ۱۰: ریاضی ششم دبستان (۱۳۹۸) - صفحه ۳۷

از بین سه کتاب درسی ریاضی مدرسه‌ای در مقطع متوسطه اول، تنها در کتاب ریاضی پایه هفتم به طرح مسئله اشاره شده است. کتاب ریاضی پایه هفتم شامل ۸ موقعیت مرتبط با طرح مسئله است که دو مورد آنها مشابه موقعیت‌های مطرح شده در کتاب‌های درسی ریاضی مقطع ابتدایی هستند. شکل‌های (۱۱) و (۱۲)، مثال‌هایی از موقعیت‌های مطرح شده در کتاب درسی ریاضی پایه هفتم را نشان می‌دهند. دو راهبرد «زیر مسئله» مطرح شده در شکل (۱۱) و «حل مسئله ساده‌تر» مطرح شده در شکل (۱۲) بر اساس دیدگاه سیلور (۱۹۹۴) جز موارد طرح مسئله به شمار می‌آیند. لازم به ذکر است که علی‌رغم آموزش این راهبردها در پایه هفتم، در پایه‌های بعدی هیچ اشاره‌ای به این راهبردها نشده است.

راهبرد زیرمسئله



مسئله پیچیده و چند مرحله‌ای را به چند مسئله ساده تبدیل کنید. فهرستی از این زیرمسئله‌ها را درست کنید؛ سپس به ترتیب به آنها پاسخ دهید. اگر ترتیب زیرمسئله‌ها را درست تشخیص داده باشید، حل هر زیرمسئله به حل مسئله بعدی کمک می‌کند تا در نهایت به خواسته اصلی مسئله برسید.

- ۱- پس‌انداز هفتگی محمد، ۳۰۰۰ تومان است. او حساب کرد ۵ هفته پس‌انداز او، نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چقدر است؟
 الف) پس‌انداز ۵ هفته چقدر می‌شود؟
 ب) اگر این عدد نصف قیمت کیف باشد، قیمت کیف چقدر است؟

شکل ۱۱. ریاضی هفتم (۱۳۹۸) - صفحه ۷

راهبرد حل مسئله ساده‌تر



برای حل بعضی از مسئله‌ها، ابتدا مسئله‌ای ساده‌تر را که با مسئله اصلی در ارتباط است، حل می‌کنیم. سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ مسئله ساده شده، جواب مسئله اصلی را به دست می‌آوریم. برای ساده کردن مسئله می‌توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک‌تر استفاده کرد. برای نتیجه‌گیری و پیدا کردن پاسخ مسئله اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می‌کنیم و الگوی کشف شده در مسئله ساده را به مسئله اصلی مرتبط می‌کنیم.

- ۱- قطر خورشید ۱۳۹۲۵۳۰ کیلومتر و قطر کره زمین ۱۲۷۵۶/۶ کیلومتر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

برای ساده شدن مسئله بهتر است از عددهای تقریبی استفاده کنید. $1392530 \approx 1000000$
 $12756/6 \approx 2000$
 خلاصه مسئله ساده شده را بنویسید و پاسخ دهید.



شکل ۱۲. ریاضی هفتم (۱۳۹۸) - صفحه ۸

جمع بندی، بحث و نتیجه گیری

نتایج جدول ۲ و نمودار ۱ نشان می دهند که تعداد موقعیت های طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ایران در پایه های اول تا نهم، محدود است. اما با یک تغییر کوچک در متن مثال های فعلی کتاب های درسی می توان آنها را به موقعیت های طرح مسئله تبدیل نمود. برای نشان دادن نحوه به کارگیری این روش (ایجاد تغییر کوچک در متن مثال ها) می توان موقعیت مطرح شده در شکل (۱۳) را در نظر گرفت و سپس با استفاده از برخی روش ها، موقعیت های طرح مسئله جدید ارایه کرد.



شکل ۱۳. ریاضی سوم ابتدایی (چاپ ۱۳۹۸) - صفحه ۱۴۴

برای طرح مسئله بر اساس موقعیت مطرح شده در شکل ۱۳ می توان از راهبردهای طرح مسئله ارایه شده سیلور^۱، مامونا-دانز^۲، لئونگ^۳ و کننی^۴ (۱۹۹۶)، به نقل سینگر، التون و کای، (۲۰۱۳)، استفاده کرد. برخی از مثال های پیشنهادی بر اساس این راهبردها، در جدول ۳ آمده است.

¹ Silver

² Mamona-Downs

³ Leung

⁴ Kenney

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور

جدول ۳. راهبردهای طرح مسئله (سیلور، مامونا-دائز، لئونگ و کنتی

(۱۹۹۶، به نقل سینگر، التون و کای، ۲۰۱۳)

راهبردهای طرح مسئله	مثال برای مسائل طرح شده
دستکاری محدود (تغییر مفروضات ضمنی)	اگر داخل هر کابین چرخ و فلک ۴ دانش آموز باشد، تعداد دانش آموزان را پیدا کنید.
دستکاری هدف (تغییر خواسته مسئله داده شده)	اگر ظرفیت کلی چرخ و فلک ۱۶ نفر باشد، از هر کابین چند نفر باید پیاده شوند؟
تقارن (تبادل بین خواسته ها و شرایط مسئله)	اگر در یک چرخ و فلک با ۸ کابین ۳۲ نفر سوار شوند، در هر کابین چند نفر سوار شده‌اند؟
زنجیری کردن (گسترش مسئله موجود به گونه ای که حل مسئله ی جدید نیازمند حل مسئله اولیه باشد)	اگر هزینه بلیط هر نفر ۱۰ هزار تومان باشد، هزینه همه دانش آموزان چقدر می شود؟

به منظور ارایه موقعیت های طرح مسئله بیشتر بر اساس موقعیت مطرح شده در شکل

۱۳ می توان همچنین از راهبردهای پیشنهادی براون و والتز (۲۰۰۴) نیز استفاده کرد.

جدول ۴ نحوه استفاده از راهبرد پیشنهادی براون و والتز (۲۰۰۴) را نشان می دهد.

جدول ۴. راهبردهای طرح مسئله (براون و والتز، ۲۰۰۴)

عنوان سطح	سطح	توضیح در مورد سطح مورد نظر
انتخاب نقطه شروع	سطح صفر	شکل چرخ و فلک برگرفته از کتاب درسی ریاضی پایه سوم ابتدایی (چاپ ۱۳۹۸)، صفحه ۱۴۴

توضیح در مورد سطح مورد نظر	عنوان سطح	سطح
		
<p>۱. چرخ و فلک دایره‌ای شکل است. هشت کابین دارد.</p> <p>۲. فاصله کابین‌ها با هم برابر است. در همه کابین‌ها تعداد افراد یکسان است.</p> <p>۳. در هر کابین ۳ نفر سوار شده‌اند.</p> <p>۴. چرخ و فلک با دوپایه به زمین متصل شده‌است. پایه‌ها متقارن‌اند.</p> <p>۵. و...</p>	<p>ویژگی‌های و فرض‌های مطرح شده در مسئله را فهرست می‌کنیم.</p>	<p>سطح یک</p>
<p>۱. اگر چرخ و فلک دایره‌ای نباشد (مثلاً مربع شکل باشد)، چه می‌شد؟</p> <p>۲. اگر چرخ و فلک هشت کابین نداشت (کمتر یا بیشتر)، چه می‌شد؟</p> <p>۳. اگر فاصله کابین‌ها یکسان نبود، چه می‌شد؟</p> <p>۴. و...</p>	<p>استفاده از عبارت «اگر اینطور نبود، چه می‌شد؟»</p>	<p>سطح دو</p>

سطح	عنوان سطح	توضیح در مورد سطح مورد نظر
سطح سه	پرسیدن سؤال یا طرح مسئله	فرض کنید چرخ و فلک شکل ۱۳ به شکل مربع باشد و روی هر ضلع آن به ترتیب ۱،۲،۳،۴ کابین قرار داشته باشد و ظرفیت هر کابین حداکثر ۵ نفر باشد. این را هم در نظر بگیرید که در صورتی چرخ و فلک حرکت می کند که تفاوت وزن هر دو ضلع آن کمتر از ۶۰ کیلوگرم باشد. ۳۰ دانش آموز داریم که وزن آن‌ها به طور متوسط ۳۵ کیلوگرم است و می خواهند به صورت همزمان سوار چرخ و فلک شوند. چگونه می توان آن‌ها را در کابین‌ها جای داد؟
سطح چهارم	تحلیل مسئله و بحث در مورد آن	۱. بررسی متناسب بودن سوال مطرح شده با پایه تحصیلی دانش آموزان؛ ۲. بحث پیرامون حل مسئله‌ی طرح شده توسط دانش آموزان، آن‌ها را متوجه اشتباهاتشان در طرح مسئله خواهد کرد و توانایی حل مسئله-شان را بهبود خواهد داد.

پژوهش‌های متعدد در حوزه طرح مسئله نشان می دهند که توانایی دانش آموزان ایرانی در طرح مسئله ریاضی خوب نیست (فرزند، ۱۳۹۱، اسکندری، ۱۳۹۲، نادری، ۱۳۹۳ و رحمانی، ۱۳۹۸). محدود بودن موقعیت های مرتبط با طرح مسئله کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای می تواند یکی از دلایل عدم توانایی دانش آموزان در طرح مسئله باشد. با برخی راهبردهای معرفی شده در جدول ۳ و ۴ می توان تغییرات کوچکی را در متن کتاب‌های درسی ریاضی ایجاد کرد و موقعیت جدیدی را برای طرح مسئله خلق نمود.

سخن پایانی

آموزش طرح مسئله نتایج مثبت فراوانی را با خود به همراه دارد که از جمله می توان به توسعه خلاقیت دانش آموزان، درک بهتر ساختار یک مسئله، بهبود عملکرد حل مسئله، ارتقا توانایی تفکر و ایجاد بینش برای معلمان نسبت به تفکر دانش آموزان، اشاره کرد. نتایج به دست آمده از بررسی کتاب های درسی ریاضی نشان داد که مجموع موقعیت های مرتبط با طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی مدرسه ای، ۴۰ مورد است و بیشترین میزان توجه به رویکرد طرح مسئله در کتاب درسی ریاضی پایه پنجم دوره ابتدایی است که تنها در ۱۰ مورد به طرح مسئله اشاره شده است. لازم به ذکر است که این میزان (۱۰ مورد) هم در مقایسه با موقعیت های حل مسئله بسیار ناچیز است. در این مقاله تلاش شد با آوردن مثال های ملموس طرح مسئله از کتاب های درسی ریاضی، این رویکرد به معلمان ریاضی معرفی گردد تا از این طریق شکاف بین نظریه و عمل تدریس کمرنگ گردد. در واقع این مثال ها، در کاربست یافته های پژوهشی در کلاس های درس ریاضی رهگشا خواهند بود. همچنین نتایج این مطالعه نشان دادند که بیشترین توجه به موقعیت های نیمه ساختار یافته در رویکرد طرح مسئله اختصاص یافته است. به طور کلی علیرغم اهمیت آموزش طرح مسئله، توجه مطلوبی به فعالیت های مبتنی بر آن در تالیف کتاب های درسی نشده است و طرح مسئله جایگاه تعریف شده ای در کتاب های ریاضی مدرسه ای ایران ندارد. بر اساس نتایج این مطالعه، پیشنهاد می شود که رویکرد طرح مسئله به طور جدی در تالیف کتاب های درسی ریاضی در آینده، مورد توجه قرار گیرد. در پایان لازم به ذکر است که استفاده از انواع مختلف طرح مسئله اعم از ساختار یافته، نیمه ساختار یافته و بدون ساختار، در کتاب های درسی ریاضی، می تواند دامنه توانایی دانش آموزان امروز و شهروندان فردا را به خوبی توسعه دهد.

جایگاه طرح مسئله در کتاب های درسی ریاضی ... نویسنده اول: دکتر ابوالفضل رفیع پور

فهرست منابع فارسی

- اسکندی، مجتبی. (۱۳۹۲). بررسی تاثیر پرورش طرح مسئله بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان. پایان نامه منتشر نشده. کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.
- براون، آ. والتر، م. (۱۳۹۶). هنر طرح مسئله (ترجمه. ی طیبه طباطبایی فر، بهزاد نجفی). تهران: فاطمی. (تاریخ انتشار زبان اصلی ۲۰۰۴).
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی اول دبستان - ۱۰۵. تهران: شرکت شرکت افست.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی دوم دبستان - ۲۰۵. تهران: شرکت شرکت افست.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی سوم دبستان - ۳۰۵. تهران: شرکت شرکت افست.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی چهارم دبستان - ۴۰۵. تهران: شرکت شرکت افست.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی پنجم دبستان - ۵۰۵. تهران: شرکت شرکت افست.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی ششم دبستان - ۶۰۵. تهران: شرکت شرکت افست.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه - ۷۰۵. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸). ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه - ۸۰۵. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.

- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. (۱۳۹۸).
ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه - ۹۰۵. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران .
- رحمانی، مریم (۱۳۹۸) کنکاشی بر عواطف و عملکرد دانش‌آموزان بر
فعالیت‌های مبتنی بر طرح مسئله. پایان نامه منتشر نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی.
دانشگاه شهید باهنر کرمان .
- فرزندی، منیره. (۱۳۹۱). بررسی توانایی دانش‌آموزان در طرح مسئله ریاضی و رابطه
آن با خلاقیت و دانش ریاضی (هندسه). پایان نامه منتشر نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش
ریاضی. دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- کری‌پندورف، ک. (۱۳۸۳). تحلیل محتوا: مبانی روش‌شناسی. ترجمه هوش‌نگ
نایبی. تهران: نشر نی .
- نادری، سونا. (۱۳۹۳). بررسی توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان. پایان نامه منتشر
نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

ب: فهرست منابع انگلیسی

- Bonotto, C. (2013). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. 34(2) 399-499.
- Cai, J. Jiang, c. (2017). An Analysis of Problem-Posing Tasks in Chinese and US Elementary Mathematics Textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education* 15(1), 1521-1540.
- Cai, J. Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem

posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*. Springer Science, 83(1), 87-101.

- Hasana, N. Hayashi, Y. Hirashima, T. (2017). An analysis of learner outputs in problem posing as sentence-integration in arithmetic word problems. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning* 12(9), 2-16.

- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior* 31(1), 149–161.

- Singer, M. Ellerton, N. Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 1-7.

- Singer, M. Ellerton, N. Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing*. New York: Springer Science.

- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

- Stoyanova, E., Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education*, 518–525. Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه‌درسی، شماره ۱۷، سال نهم، بهار و تابستان ۱۴۰۰